2. cvičení - řešení

Příklad 1 (a) $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ pro $q \neq 1$

Nejdříve ověříme, že požadovaný vzorec platí pro $n = 0$. Pak ověříme, že pokud požadovaný vzorec platí prro n, pak platí i pro $n+1$. Tím bude dokázáno, že vzorec platí pro nulu a všechna přirozená čísla (neb bude platit pro 0 a pro o jedna větší číslo, což je 1, a o jedna větší číslo, což je 2, atd.).

• $n = 0$

Pak $\sum_{k=0}^{0} = 1 = \frac{1-q^{0+1}}{1-q} = \frac{1-q}{1-q}$

• $n \to n+1$

Náš indukční předpoklad je: $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ pro $q \neq 1$ - budeme jej značit IP.

Začněme levou stranou vzorce, který chceme dokázat.

$$\sum_{k=0}^{n+1} q^k = \sum_{k=0}^{n} q^k + q^{n+1} \overset{\text{IP}}{=\!=} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + q^{n+1} = \frac{1-q^{n+1}+q^{n1}(1-q)}{1-q} =$$
$$= \frac{1-q^{n+1}+q^{n+1}-q^{n+2}}{1-q} = \frac{1-q^{(n+1)+1}}{1-q}$$

Příklad 1 (b) $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

• $n = 1$

$\sum_{k=1}^{1} k = 1 = \frac{1(1+1)}{2}$

• $n \to n+1$

IP je: $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{n} k + (n+1) \overset{\text{IP}}{=} \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Příklad 1 (c) Pro $n \in \mathbb{N}$ platí: $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \ldots \frac{2n-1}{2n} \leq \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$

$n = 1$

Levá strana je rovna $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$, což je rovno pravé straně dokazovaného vzorce.

$n \to n+1$

IP: $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \ldots \frac{2n-1}{2n} \leq \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$

Chci dokázat: $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \ldots \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n+1}{2n+2} \leq \frac{1}{\sqrt{2n+3}}$.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \ldots \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n+1}{2n+2} \leq & \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \cdot \frac{2n+1}{2n+2} = \\
&= \frac{\sqrt{(2n+1)(2n+3)}}{2n+2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2n+3}} = \\
&= \frac{\sqrt{4n^2+4n+4+4n-1}}{2n+2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2n+3}} \overset{*}{\leq} \\
&\leq \frac{\sqrt{(2n+2)^2}}{2n+2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2n+3}} = \frac{1}{\sqrt{2n+3}}
\end{aligned}$$

Nerovnost označená hvězdičkou platí poněvadž $n \geq 1$ a tedy $4n \geq 1$.

Příklad 1 (d) Pro $n \in \mathbb{N}$ platí: $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n\cdot(n+1)} = \frac{n}{n+1}$

- $n = 1$

  Levá strana je rovna $\frac{1}{1\cdot 2} = \frac{1}{2}$, což je rovno pravé straně dokazovaného vzorce.

- $n \to n+1$

  IP: $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n\cdot(n+1)} = \frac{n}{n+1}$

  Chci dokázat: $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n\cdot(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}$.

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n\cdot(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} &\overset{\text{IP}}{=} \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \\
&= \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} = \\
&= \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)} = \\
&= \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \\
&= \frac{n+1}{n+2}
\end{aligned}
$$

Příklad 1 (e) Pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $5^n - 1$ dělitelné čtyřmi.

- $n = 1$

  Pak $5^1 - 1 = 4$, což je zřejmě delitelné čtyřmi.

- $n \to n+1$

  IP: $5^n - 1$ je dělitelné čtyřmi - tj. existuje $k \in \mathbb{N}$ t.ž. $5^n - 1 = 4k$.

  $5^{n+1} - 1 = 5\cdot 5^n - 1 - 4 + 4 = 5\cdot 5^n - 5 + 4 = 5(5^n - 1) + 4 \overset{\text{IP}}{=} 5\cdot 4k + 4 = 4(5k+1)$

  Z poslední rovnosti plyne, že $5^{n+1} - 1$ je dělitelné čtyřmi, neb $5k + 1 \in \mathbb{N}$.

Příklad 1 (f) Pro $n \in \mathbb{N}$ platí: $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

- $n = 1$

  Zjevně.

- $n \to n+1$

  IP: $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

  Chci dokázat: $\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$.

$$\left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2 =$$
$$= \left(\frac{n(n+1)}{2} + (n+1)\right)^2$$
$$= \left(\frac{n(n+1))}{2}\right)^2 + n(n+1)^2 + (n+1)^2 \overset{\text{IP}}{=}$$
$$= \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3$$

Příklad 1 (f) Pro $n \in \mathbb{N}$ platí: $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

- $n = 1$

  Zjevně.

- $n \to n+1$

  IP: $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

  Chci dokázat: $\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$.

$$\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} =$$
$$= \frac{n(n+1)(2n+1+2)}{6} + \frac{2(n+1)(2n+3)}{6}$$
$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{2n(n+1)}{6} + \frac{(n+1)(2n+3)}{3} \overset{\text{IP}}{=}$$
$$= \sum_{k=1}^{n} k^2 + \frac{n^2+n}{3} + \frac{2n^2+3n+2n+3}{3} = \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2$$

Příklad 1 (g) Pro $n \geq 2$ platí: $(1-\frac{1}{2^2})(1-\frac{1}{3^2})\dots(1-\frac{1}{n^2}) = \frac{n+1}{2n}$

- $n = 1$

  Zjevně.

- $n \to n+1$

  IP: $(1-\frac{1}{2^2})(1-\frac{1}{3^2})\dots(1-\frac{1}{n^2}) = \frac{n+1}{2n}$

  Chci dokázat: $(1-\frac{1}{2^2})(1-\frac{1}{3^2})\dots(1-\frac{1}{n^2})(1-\frac{1}{(n+1)^2}) = \frac{n+2}{2n+2}$.

$$(1-\frac{1}{2^2})(1-\frac{1}{3^2})\dots(1-\frac{1}{n^2})(1-\frac{1}{(n+1)^2}) =$$
$$\overset{\text{IP}}{=} \frac{n+1}{2n} \cdot (1-\frac{1}{(n+1)^2}) = \frac{n^2+2n}{2n(n+1)}$$
$$= \frac{n+2}{2n+2}$$

Příklad 2 (a)

Použijeme tabulkovou metodu. Tj. první sloupce tabulky budou atomární výroky (písmena, která se vyskytují ve zkoumaném výroku). Řádky těchto sloupců vyplníme tak, aby v tabulce byly obsaženy všechny kombinace nul a jedniček pro atomární výroky (tj. pro dva atomární výroky budou 4 řádky, pro tři atomární výroky 8 řádků atd.).

Další sloupce budou výroky, ze kterých je postupně složen výsledný výrok. Posledním sloupcem bude výsledný výrok. Řádky budeme vyplňovat podle tabulky uvedené v teorii.

Výrok je tautologií, pokud v jeho sloupci jsou výhradně jedničky.

A	$\neg A$	$\neg(\neg A)$	$A \iff \neg(\neg A)$
1	0	1	1
0	1	0	1

Příklad 2 (b)

A	B	$A \implies B$	$\neg B$	$\neg A$	$\neg B \implies \neg A$	$(A \implies B) \iff (\neg B \implies \neg A)$
1	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1

Příklad 2 (c)

A	$\neg A$	$A \vee (\neg A)$
1	0	1
0	1	1

Příklad 2 (d)

A	B	$A \implies B$	$C := (\neg(A \implies B))$	$\neg B$	$D := (A \wedge \neg B)$	$C \iff D$
1	1	1	0	0	0	1
1	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0	1
0	0	1	0	1	0	1

Příklad 2 (e)

A	B	$C := (A \implies B)$	$\neg A$	$D := (\neg A \vee B)$	$C \iff D$
1	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	1
0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1

Příklad 2 (f)

A	B	C	$D := (A \implies B)$	$E := (B \implies C)$	$F := (D \wedge E)$	$G := (A \implies C)$	$F \implies G$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	1
1	0	1	0	1	0	1	1
1	0	0	0	1	0	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1	1	1

Příklad 3 (a) $\forall x \in \mathbb{N}\ \exists y \in \mathbb{N}\ \forall z \in \mathbb{N}\colon z > x \implies z > y$

Pravdivost:

Výrok říká: pro každé přirozené x existuje přirozené y t.ž. pro každé přirozené z platí $z > x \implies z > y$.

Zvolme tedy libovolné přirozené x. Pak můžeme za y volit např. $y = x$. Pak platí-li $z > x = y$, pak platí i $z > y$ a výrok je zřejmě pravdivý.

Negace:

Použijeme návod z teorie. Tedy místo $\forall$ napíšeme $\exists$ a naopak. A znegujeme výrok za kvantifikátory. V tomto případě potřebujeme znegovat výrok $z > x \implies z > y$. Označíme-li výrok $z > x$ jako A a výrok $z > y$ jako B, pak negace výroku $A \implies B$ je $A \wedge \neg B$ (dle příkladu 2 (d)).

Přičemž $\neg B$ je $z \leq y$.

Znegovaný výrok je pak: $\exists x \in \mathbb{N}\ \forall y \in \mathbb{N}\ \exists z \in \mathbb{N}\colon z > x \wedge z \leq y$.

Příklad 3 (b) $\forall x, y \in \mathbb{R}\colon x \cdot y \geq 0 \implies x + y \geq 0$

Pravdivost:

Výrok neplatí - např. pro $x = -3, y = -5$ platí, že $x \cdot y = (-3) \cdot (-5) = 15 \geq 0$, ale $x + y = -3 - 5 = -8 \ngeq 0$.

Negace:

Obdobně jako výše.

Znegovaný výrok je pak: $\exists x, y \in \mathbb{R}\colon xy \geq 0 \wedge x + y < 0$.

Příklad 3 (c) $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}\colon x \cdot y = 1$

Pravdivost:

Nepravdivý - např. pro $x = 0$ neexistuje y t.ž. $0 \cdot y = 1$.

Negace:

Stačí pouze zaměnit kvantifikátory a negace $=$ je $\neq$.

Znegovaný výrok je pak: $\exists x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R}\colon x \cdot y \neq 1$.

Příklad 3 (d) $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\ \exists y \in \mathbb{R}\colon x \cdot y = 1$

Pravdivost:

Pokud $x \neq 0$, pak se jím dá rovnice vydělit, čímž dostaneme $y = \frac{1}{x}$, což je reálné číslo takové, že $x \cdot y = 1$. Našli sjme tedy $y \in \mathbb{R}\colon x \cdot y = 1$. Výrok je tedy pravdivý.

Negace:

Znegovaný výrok je pak: $\exists x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\ \forall y \in \mathbb{R}\colon x \cdot y \neq 1$.

Příklad 3 (e) $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{Q}\colon y \leq x \wedge x < y + 1$

Pravdivost:

Zvolme $x \in \mathbb{R}$. Pokud $\exists y \in \mathbb{Q}$ splňující výrok, pak pro něj musí platit: $y \leq x$ a $x - 1 < y$. Tedy musí $y \in (-\infty, x]$ a $y \in (x - 1, \infty)$ a $y \in \mathbb{Q}$. Tedy $y \in (x - 1, x] \cap \mathbb{Q}$. Pokud $x \in \mathbb{Z}$, pak za y lze volit x. Pokud $x \notin \mathbb{Z}$, pak musí existovat celé číslo v intervalu $(x - 1, x]$ - jde o interval délky 1 a celá čísla jsou od sebe vzdálena o 1 a je jich nekonečně mnoho. Pak za y opět zvolíme to celé číslo.

Negace:

Negujeme konjunkci: $\neg(A \wedge B) \iff (\neg A \vee \neg B)$ (lze ověřit podoboně jako v příkladu 2).

Znegovaný výrok je pak: $\exists x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{Q}\colon y > x \vee x \geq y + 1$.

Příklad 3 (f) $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{N}\colon y \leq x \wedge x < y + 1$

Pravdivost:
Výrok je nepravdivý - např. pokud $x = -1 \in \mathbb{R}$, pak neexistuje $y \in \mathbb{N}$ t.ž. $y \leq -1$.

Negace:
Opět jde o negaci konjunkce (stejně jako v předchozím případě).
Znegovaný výrok je pak: $\exists x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{N}\colon y > x \vee x \geq y + 1$.

Příklad 4 (a) Každý ženatý muž miluje svou manželku.

Jinými slovy platí, že je-li muž manželem ženy, pak ji miluje. Cože se dá zapsat takto: $\forall m \in M\ \forall z \in Z\colon S(m, z) \implies L_1(m, z)$.

(doslovně: pro libovolného muže m a libovolnou ženu z platí, že jsou li manžely, pak muž m miluje ženu z)

Příklad 4 (b) Každou ženu miluje nějaký muž.

Jinými slovy: pro každou ženu existuje muž takový, že ji miluje.

$\forall z \in Z\ \exists m \in M\colon L_1(m, z)$

Příklad 4 (c) Každý muž má nejvýše jednu manželku.

$\forall m \in M\ \forall z_1, z_2 \in Z\colon (S(m, z_1) \wedge S(m, z_2)) \implies z_1 = z_2$

Doslovně: pro každého muže m platí, že pokud pro ženy z_1 a z_2 platí, že jsou obě manželkou muže m, pak musí jít o tu samou ženu (tj. $z_1 = z_2$).

Poznámka: napíšeme-li $\forall z_1, z_2 \in Z$, tak samo o sobě neznamená, že musí nutně jít o dvě různé ženy (jde totiž o zkrácený zápis výrazu $\forall z_1 \in Z\ \forall z_2 \in Z$).

Příklad 4 (d) Existuje vdaná žena.

Jinými slovy: existuje žena, která má manžela. Tedy existuje žena taková, že existuje muž, který je jejím manželem.

$\exists z \in \mathbb{Z}\ \exists m \in M\colon S(m, z)$

Příklad 4 (e) Existuje manželka, která miluje jiného muže, než svého manžela.

$\exists z \in Z\ \exists m_1, m_2 \in M\colon m_1 \neq m_2 \wedge S(m_1, z) \wedge L_2(m_2, z)$

Poznámka: pokud by ve výroku nebylo $m_1 \neq m_2$ nebyla by vyloučena situace, kdy má žena manžela a miluje nějakého muže a jde o toho samého muže.

Příklad 4 (f) $\exists m \in M\ \forall z \in Z : \neg S(m, z)$

Doslovně: existuje muž t.ž. pro každou ženu platí, že není jeho manželkou. Tedy Existuje muž, který nemá manželku. Tj. existuje svobodný muž.

Příklad 4 (g) $\exists z \in Z\ \forall m \in M : L_1(m, z) \implies \neg L_2(m, z)$

Doslovně: existuje žena taková, že pro každého muže platí, že pokud ji miluje, pak ona nemiluje jeho. Jinými slovy: Existuje žena, která nemá ráda nikoho, kdo má rád ji.

Příklad 4 (h) $\exists z \in Z\ \forall m \in M : L_2(m, z) \implies \neg L_1(m, z)$

Doslovně: existuje žena t.ž. pro každého muže platí, že pokud ho ona miluje, pak on nemá rád ji. Tedy existuje žena, kterou nemá rád žádný muž, kterého má ráda ona.

Příklad 5 (a) $\emptyset \subseteq A$

Plyne z definice inkluze.

Příklad 5 (b) $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$

Dokázání rovnosti dvou množin znamená dokázat, že x je prvkem jedné právě tehdy, když je prvkem druhé.

$$\begin{aligned}
&x \in A \cup B \iff x \in A \vee x \in B \\
&x \in B \iff x \in B \cap A \vee x \in B \setminus A \\
&\text{Tedy } x \in A \cup B \iff x \in A \vee x \in B \cap A \vee x \in B \setminus A \\
&\text{Navíc } x \in A \iff x \in A \vee x \in B \cap A
\end{aligned}$$

Z posledních dvou řádků plyne, že $x \in A \cup B \iff x \in A \vee x \in B \setminus A \iff x \in A \cup (B \setminus A)$ (poslední ekvivalence plyne z definice sjednocení množin).

Dokázali jsme tedy, že $x \in A \cup B \iff x \in A. \cup (B \setminus A)$

Příklad 5 (c) $A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$

Odobně: $x \in A \iff x \in A \cap B \vee x \in A \setminus B$.

Příklad 5 (d) $(A \cap B = A) \iff A \subseteq B$

$A \cap B = A$ znamená, že $x \in A \iff x \in A \cap B$.

$A \subseteq B$ znamená, že $x \in A \implies x \in B$.

Stačí tedy dokázat, že $C \implies D$, kde $C = (x \in A \iff x \in A \cap B), D = (x \in A \implies x \in B)$.

- $C \implies D$

  $C \implies (x \in A \implies x \in B)$, neboť $x \in A \cap B \implies x \in B$.

- $C \impliedby D$

  - $x \in A \implies x \in A \cap B$

    Pokud $x \in A$, pak dle D platí, že $x \in B$. Tedy $x \in A \cap B$. Z toho dostáváme, že $x \in A \implies x \in A \cap B$

  - $x \in A \cap B \implies x \in a$

    Pokud $x \in A \cap B$, pak zřejmě $x \in A$. (tato implikace platí nezávisle na D)

  Tím dostáváme, že $C \impliedby D$.

Příklad 5 (e) $X \cup (A \cup B) = (X \cup A) \cup B$

$$\begin{aligned}
x \in X \cup (A \cup B) &\iff x \in X \vee x \in A \cup B \iff x \in X \vee (x \in A \vee x \in B) \\
&\overset{(1)}{\iff} (x \in X \vee x \in A) \vee x \in B \iff x \in X \cup A \vee x \in B \\
&\iff x \in (X \cup A) \cup B
\end{aligned}$$

Přičemž u (1) jsme využili fakt: $(E \vee F) \vee G \iff E \vee (F \vee G)$ (což lze ověřit tabulkovou metodou).

Příklad 5 (f) $X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$

$$\begin{aligned}
x \in X \setminus (A \cup B) &\iff x \in X \wedge x \notin (A \cup B) \iff x \in X \wedge x \notin A \wedge x \notin B \\
&\overset{(2)}{\iff} (x \in X \wedge x \notin A) \wedge (x \in X \wedge x \notin B) \iff x \in X \setminus A \wedge x \in X \setminus B \\
&\iff x \in (X \setminus A) \cap (X \setminus B)
\end{aligned}$$

Přičemž u (2) jsme využili fakt: $E \wedge F \wedge G \iff (E \wedge F) \wedge (E \wedge G)$ (což lze ověřit tabulkovou metodou).

Příklad 6 (a)$A = \{5, 6\}$
$\inf A = 5 = \min A, \sup A = 6 = \max A$

Příklad 6 (b)$B = [-2, 5)$
$\inf B = -2 = \min B, \sup B = 5, \max A$ neexistuje.
Dokažme pořádně, že $\inf B = -2$ - ověříme definici.

(i) $\forall x \in B \colon x \geq -2$ - zřejmě platí (z definice intervalu)

(ii) $\forall g' \in \mathbb{R}\ \exists x \in B \colon x < g'$

Zvolme $g' \in \mathbb{R}, g' > -2$ libovolně. Pak existuje $x \in B$ t.ž. $x < g'$, neb $B \cap (-\infty, g') = (-2, \min\{5, g'\}) \neq \emptyset$.

Číslo -2 tedy splňuje definici infima. Jde proto o infimum.
Podobně se dokáže, že $5 = \sup B$.
Avšak 5 není maximem množiny B, neb nejde o prvek dané množiny.
Naopak číslo -2 je minimum množiny B, neb jde o infimum, které je v ní obsaženo.

Příklad 6 (c) $C = \{q \in \mathbb{Q} \colon q^2 \leq 2\}$
Nerovnost $q^2 \leq 2$ splňují právě čísla, pro která platí: $-\sqrt{2} \leq q \leq \sqrt{2}$. Tedy $D = \mathbb{Q} \cap [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$.
Proto naším kandidátem na $\inf C$ je číslo $-\sqrt{2}$. Ověřme tedy definici infima.

(i) $\forall x \in C \colon x \geq -\sqrt{2}$ - zřejmé

(ii) $\forall g' \in \mathbb{R}\ \exists x \in C \colon x < g'$

Zvolme $g' \in \mathbb{R}, q' > -\sqrt{2}$. Zajímá nás jestli $C \cap (-\sqrt{2}, g')$ obsahuje nějaký prvek. Pokud $g' \geq \sqrt{2}$, pak $C \cap (-\sqrt{2}, g') = C$, což je neprázdná množina (obsahuje např. 0). Pokud $g' < \sqrt{2}$, pak $C \cap (-\sqrt{2}, g') = \mathbb{Q} \cap (-\sqrt{2}, g')$, což je též neprázdná množina dle věty 1.6.

Tedy skutečně $-\sqrt{2} = \inf D$. Podobně lze odvodit $\sup C = \sqrt{2}$. Množina C ale nemá maximum, ani minimum, neb $-\sqrt{2}, \sqrt{2} \notin C$ (nejde o racionální čísla).

Příklad 6 (d) $D = \{x \in \mathbb{R} \colon x < 0\}$
$\sup D = 0, \inf D, \max D$ a $\min D$ neexistují.

Příklad 6 (e) $E = \{x \in \mathbb{R} \colon x \leq 0\}$
$\sup E = \max E = 0, \inf E, \min E$ neexistují.

Příklad 6 (f) $F = \{x \in \mathbb{R} \colon x \sin x < 1\}$
Funkce $\sin x$ periodicky mění znaménko. Číslo 0 je jistě prvkem množiny F.

- $x > 0$

  Pak existuje $x' > x$ t.ž. $x' \sin x' < 1$ (stačí vzít celočíselný násobek π). Pak $x' \in F$. Proto F nemá ani supremu, ani maximum. (neb nad každým kladným číslem existuje číslo, které je prvkem množiny F)

- $x < 0$

  Pak existuje $x' < x$ t.ž. $x' \sin x' < 1$ (opět celoočíselný násobek π). Proto množina F nemá ani infimum či minimum.

Příklad 7 (a) $A = \{\frac{p}{p+q} : p \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{N}\}$

Jelikož $p, q \in \mathbb{N}$, bude zlomek $\frac{p}{p+q}$ vždy kladný. Proto $\inf A$ existuje a je nezáporné.

Pokud $p = 1$, pak $\frac{p}{p+q} = \frac{1}{1+q}$. Čím větší je q, tím menší je zlomek. Můžeme říct, že hodnota zlomku jde do nuly. Kandidátem na infimum tedy je 0. Stačí ukázat, že Zlomek může být libovolně blízko nuly. Tzn. stačí, aby pro každé $\varepsilon > 0$ existovalo $q \in \mathbb{N}$ t.ž. $\frac{1}{1+q} < \varepsilon$. Takové q existuje - stačí, aby $q > \frac{1}{\varepsilon} - 1$ (což lze dle Archimedovy vlastosti).

Dostáváme tedy, že $\inf A = 0$.

Dále platí, že $p < p + q$, tedy $\frac{p}{p+q} < 1$. Proto $\sup A \leq 1$. Zkusme ukázat, že 1 je supremum. Stačí ukázat, že $\frac{p}{p+q}$ může být libovolně blízko jedničce.

Zvolme $\varepsilon \in (0, 1)$. Chceme nalézt $p, q \in \mathbb{N}$ t.ž. $\frac{p}{p+q} > \varepsilon$. Zvolme $q = 1$. Pak kýžená nerovnost dává následující. Z toho plyne, že $\sup A = 1$.

$$\begin{aligned}
&\varepsilon < \frac{p}{p+1} \\
&\varepsilon p + \varepsilon < p \\
&p(\varepsilon - 1) < -\varepsilon \\
&p > \frac{\varepsilon}{\varepsilon - 1}
\end{aligned}$$

Jelikož šlo o ekvivalentní úpravy, dostáváme, že pro $p > \frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}$ platí kýžená nerovnost. Takové p jistě existuje z Archimedovy vlastnosti.

Maximum ani minimum neexistují.

Příklad 7 (b) $B = \{\sin x : x \in (0, \pi)\}$

Opět z grafu.

$\inf B = 0, \min B$ neexistuje, $\sup B = \max B = 1$

Příklad 7 (c) $C = \{n^2 - m^2 : n, m \in \mathbb{N}\}$

- $n = 1$

  Pak $n^2 - m^2 = 1 - m^2$ - tento výraz není zdola omezený pro $m \in \mathbb{N}$. Proto $\inf C, \min C$ neexistují.

- $m = 1$

  Pak $n^2 - m^2 = n^2 - 1$, který naopak není omezený shora. Proto $\max C, \sup C$ neexistují.

Příklad 7 (d) $D = \{n^2 - m^2 : n, m \in \mathbb{N}, n > m\}$

Pokud $m = 1$, pak n může být libovolně velké. Tedy i $n^2 - m^2$ bude libovolně velké. Proto D není shora omezená a nemá tedy ani supremum či maximum.

Jelikož $n > m$, tak $n^2 - m^2 > 0$. Čím menší bude n, tím menší bude celková hodnota $n^2 - m^2$. Čím blíž bude m číslu n, tím menší bude hodnota zkoumaného výrazu. Proto zřejmě minimum je v případě, že $n = 2, m = 1$. Pak $n^2 - m^2 = 2^2 - 1^2 = 3$. Tedy $\inf D = \min D = 3$.

Příklad 7 (e) $E = \{2^{-n} + 3^{-n} : n \in \mathbb{N}\}$

Výraz $2^{-n} + 3^{-n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n$ je klesající. Tedy maxima se nabývá pro nejmenší možnou hodnotu n. Tedy $\max E = \sup E = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$.

Z téže myšlenky dostáváme kandidáta na infimum - a to nulu. Zřejmě je výraz vždy ≥ 0. Stačí tedy ukázat, že pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $n \in \mathbb{N}$ t.ž. $2^{-n} + 3^{-n} < \varepsilon$. Stačí, aby $2^{-n} < \frac{\varepsilon}{2}$ a $3^{-n} < \frac{\varepsilon}{2}$.

Zřejmě existuje $n_1 \in \mathbb{N}$ t.ž. $2^{-n_1} < \frac{\varepsilon}{2}$ a pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_1$ platí tato nerovnost též. Podoně existuje $n_2 \in \mathbb{N}$ t.ž. $3^{-n_2} < \frac{\varepsilon}{2}$ a pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_2$ platí, že $3^{-n} < \frac{\varepsilon}{2}$. Proto pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq$

$n_0 := \max\{n_1, n_2\}$ platí obě nerovnosti. Tedy i $2^{-n} + 3^{-n} < \varepsilon$. Dostáváme tedy, že $\inf H = 0$. Zřejmě však E nemá minimum, neb se infima nenabývá.

Příklad 8 (a) $A = \{x \in \mathbb{R} \colon x^4 < 16\}$

$x^4 < 16 \implies x \in \left(-\sqrt[4]{16}, \sqrt[4]{16}\right) = (-2, 2)$. Tedy $A = (-2, 2)$, tedy $\inf A = -2, \sup A = 2, \max A$ a $\min A$ neexistují.

Příklad 8 (b) $B = \{x \in \mathbb{R} \colon x^2 + 2x \le 1\}$

$$\begin{aligned}
&x^2 + 2x - 1 \le 0\\
&D = 8\\
&x \in \{-1 - \sqrt{2}, -1 + \sqrt{2}\}
\end{aligned}$$

Tedy $B = [-1 - \sqrt{2}, -1 + \sqrt{2}]$, tedy $\inf B = \min B = -1 - \sqrt{2}, \sup B = \max B = -1 + \sqrt{2}$.

Příklad 8 (c) $C = \{(-1)^n + \frac{1}{1+n} \colon n \in \mathbb{N}\}$

$(-1)^n = \begin{cases} 1, & n \text{ sudé} \\ -1, & n \text{ liché} \end{cases}$

Zřejmě platí: $\frac{1}{1+n} \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$. Tedy jistě $(-1)^n + \frac{1}{1+n} \in \left(-1, \frac{3}{2}\right]$.

Kandidát na infimum: -1, na supremum: $\frac{3}{2}$.

Zlomek $\frac{1}{1+n}$ je s rostoucím n čím dál menší.

$(-1)^n + \frac{1}{1+n} = \begin{cases} -\frac{1}{2}, & n = 1 \\ \frac{4}{3}, & n = 2 \\ < \frac{4}{3}, & n > 3 \end{cases}$

Tedy $\sup C = \max C = \frac{4}{3}$.

Z řešení příkladu 2 (a) víme, že $\frac{1}{1+n}$ se blíží 0. Lze se jím tedy vhodně přiblížit nule a to dokonce tak, že $(-1)^n = -1$, neb:

Zvolme $\varepsilon \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$. Nalezneme $n \in \mathbb{N}$ t.ž. $0 < \frac{1}{1+n} < \varepsilon$ (lze dle př. 2 (a)). Je-li n liché, pak $-1 < (-1)^n + \frac{1}{1+n} < -1 + \varepsilon$. Je-li n sudé, pak $n + 1$ liché a $-1 < (-1)^{n+1} + \frac{1}{1+(n+1)} < -1 + \varepsilon$.

Tedy $\inf C = -1, \min C$ neexistuje.

Příklad 8 (d) $D = \{1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3^k} \colon n \in \mathbb{N}\}$

Suma je zřejmě kladná a nejmenší hodnoty nabývá pro $n = 1$. Je-li suma nejmenší, je pak celkový výraz největší. Proto $\max D = \sup D = \frac{2}{3}$.

Čím je naopka suma větší, tím menší je celkový výraz. Dle vzorce z teorie platí, že

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3^k} &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{3^k} - 1 = \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}} - 1 = \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} - 1 + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{\frac{2}{3}} = \\
&= \frac{1}{3} \frac{3}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right) = \frac{1}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right).
\end{aligned}$$

Zřejmě tedy $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3^k}$ jde do $\frac{1}{2}$, neb $\left(\frac{1}{3}\right)^n$ jde do nuly. Proto je $\inf E = \frac{1}{2}$ a $\min D$ neexistuje (suma není nikdy rovna právě jedné polovině).

Příklad 8 (e) $E = \{\cos((n + \frac{1}{n})\pi) \colon n \in \mathbb{N}\}$

Pro $n = 1$ platí, že $\cos((n + \frac{1}{n})\pi) = \cos 2\pi = 1$. Vyšší hodnoty kosinus nabývat nemůže. Proto $\sup E = \max E = 1$.

Zřejmě výraz $n + \frac{1}{n}$ jde k celému číslu. Lze se tímto výrazem přiblížit k lichém velkému číslu. Kosinus je v lichých násobcích π roven -1. Proto $\inf E = -1, \min E$ neexistuje. (lze ukázat řádněji z definice infima, ponecháno čtenáři k rozmyšlení).